Έστω η συνάρτηση .

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  και να δειχθεί ότι είναι .
2. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις  και  είναι ίσες.
3. Να μελετηθεί η συνάρτηση  ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.
4. Να ορίσετε, εφόσον ορίζεται, την αντίστροφη της συνάρτησης .
5. Να δείξετε ότι αν  με , τότε υπάρχει  τέτοιο ώστε .

ΛΥΣΗ

1. Το πεδίο ορισμού της  αποτελείται από όλους εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς  για τους οποίους ισχύει:



Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  είναι το .

Για  για τα οποία ισχύει  έχουμε:









Δηλαδή για κάθε  ισχύει η συνεπαγωγή:

αν , τότε 

οπότε η συνάρτηση  είναι .

1. Το πεδίο ορισμού της  αποτελείται από όλους εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς  για τους οποίους ισχύει:





Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  είναι το , δηλαδή είναι .

Ακόμη, για κάθε  είναι:



Επομένως οι συναρτήσεις  και  είναι ίσες.

1. Για κάθε  είναι: 

Έστω  με . Έχουμε:





Δηλαδή για οπουδήποτε  ισχύει η συνεπαγωγή:

Αν , τότε .

Επομένως η συνάρτηση  είναι γνησίως αύξουσα στο .

Είναι:

*  και
* 

Το σύνολο τιμών της συνεχούς και γνησίως αύξουσας στο  συνάρτησης  είναι το: .

1. Λόγω του ερωτήματος **β)** είναι , οπότε η συνάρτηση  ως γνησίως μονότονη στο  είναι συνάρτηση  και συνεπώς αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης  (δηλαδή το σύνολο τιμών της ).

Είναι .

Θεωρούμε την εξίσωση , με , και τη λύνουμε ως προς .

Έχουμε:













Επειδή η  είναι , έχει σύνολο τιμών το  και ισχύει η ισοδυναμία:



έπεται ότι η συνάρτηση  έχει αντίστροφη συνάρτηση, η οποία ορίζεται ως έξης:

 με .

1. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι .

Θεωρούμε τη συνάρτηση .

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  αποτελείται από όλους τους πραγματικούς αριθμούς  για τους οποίους ισχύουν:



Δηλαδή είναι .

Επειδή  με , είναι , οπότε:

* Η συνάρτηση  είναι συνεχής στο , αφού προκύπτει από σύνθεση και πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
* 
* 
* Από το ερώτημα Ε3) έχουμε ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης  είναι το , οπότε 

Επομένως  (αφού ).

* Το σύνολο τιμών της συνάρτησης , είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης , δηλαδή είναι , οπότε .

Επομένως  (αφού ).

Επειδή η συνάρτηση  είναι συνεχής στο  και ισχύει , από το θεώρημα Bolzano, έπεται ότι υπάρχει  τέτοιο ώστε .

Έχουμε:







Οπότε, υπάρχει  τέτοιο ώστε .